

# OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL CON MALLAS FIJAS Y ANALISIS DE SENSIBILIDAD UTILIZANDO VARIAS APROXIMACIONES A LOS ELEMENTOS DE FRONTERA

William Ramírez Benítez\*, Manuel Julio García Ruíz\*\*

\*Pregrado Ingeniería Mecánica Universidad EAFIT, Colombia.

\*\* Ph.D. Ingeniería Aeronáutica Universidad de Sidney, Australia.

## RESUMEN

Este artículo presenta un método de optimización basado en aproximación por mallas fijas utilizando diferentes métodos para obtener la matriz de rigidez de los elementos de la frontera e implementando Optimización Estructural Evolutiva (ESO). En ESO, un valor de umbral de esfuerzo es calculado y los elementos que se encuentran por debajo de este son removidos. Desafortunadamente se producen patrones de tablero de ajedrez y fronteras dentadas. En el método de mallas fijas la representación de fronteras (B-Rep) se mantiene como una aproximación lineal a trozos. El método IsoESO utiliza el método de mallas fijas y el material es removido cortando el material sobre la isosuperficie del valor de umbral. Como la superficie resultante es suave, esta no contiene fronteras dentadas o patrones de tablero de ajedrez, evitando la concentración de esfuerzos. El algoritmo resultante converge en un número reducido de iteraciones cuando se compara con ESO.

La presente aproximación computa una función implícita basada en análisis de sensibilidad. La B-Rep es asociada con esta función implícita y el valor de umbral. La superficie final se obtiene moviendo la frontera a la posición de la iso-curva del valor de umbral de la función de sensibilidad. Resultados preliminares muestran las ventajas en tiempo y calidad de superficie resultante del presente método.

**PALABRAS CLAVE:** Elementos de la frontera, Mallas Fijas, Optimización estructural, ESO, Elementos Finitos.

## INTRODUCCION.

A diferencia del método tradicional de elementos finitos (FEM), el método de mallas fijas no usa un mallado que sigue la forma perfecta del objeto como dominio de trabajo. Este método hace uso de una retícula de elementos cuadrados (o cúbicos en 3D) que es superimpuesta en el modelo original descrito por su frontera (B-rep). Los elementos de la malla fija son luego clasificados de acuerdo a si se encuentran en el interior exterior o en la frontera del objeto. Dependiendo de esta clasificación a estos elementos se les asignan propiedades del material, para los que se encuentran al interior del dominio, propiedades de un medio no interactivo a los elementos del exterior y propiedades mixtas a los elementos de la frontera. Este procedimiento transforma el problema original en un problema con múltiples materiales. Dependiendo del modelo matemático usado para aproximar los elementos en la frontera, diferentes grados de aproximación pueden obtenerse en la solución de esfuerzos. Siguiendo este modelo, los cambios geométricos son fácilmente incorporados cambiando las propiedades de los elementos y por tanto el tiempo de re análisis se reduce drásticamente. Estudios realizados en dominios bi-dimensionales mostraron la eficiencia del método con un nivel permisible de error [1,2 3,4,5]. Se encontró que el error del campo de esfuerzos incrementa en regiones donde alrededor de los puntos de concentración de esfuerzos a valores de hasta aproximadamente el 10 % cuando se usan mallas de tamaño razonable. Sin embargo el promedio del error toma valores de aproximadamente del 5% o menos y el error del campo de desplazamientos es de aproximadamente el 1 %.

Las aplicaciones del método se encuentran en las etapas iniciales del diseño conceptual, el diseño interactivo y la optimización estructural donde rápidas estimaciones del campo de deformaciones y esfuerzo son más importantes que tediosos y prolongados análisis de alta precisión.[6,7]

El concepto clásico de optimización estructural evolutiva fue desarrollado inicialmente por Xie y Grant en 1993 [8]. La idea fundamental es que un objeto evoluciona hacia una estructura completamente esforzada removiendo muy lentamente material que no presenta niveles de esfuerzos altos. Diferentes variantes incluyen el trabajo de Kim y otros [9] en el cual se utiliza una malla fija para aproximar el dominio. García y otros [10] usan curvas de iso-esfuerzo para remover el material. Los conceptos de análisis de sensibilidad utilizados en el presente trabajo fueron

introducidos por Quing y otros [11] para el método de optimización estructural evolutiva. El método presentado en el presente artículo puede considerarse en si como una evolución de los métodos mencionados anteriormente.

## ANALISIS DE SENBILIDAD

En optimización estructural evolutiva una estructura es optimizada a través de remover o adicionar elementos. Estos son tratados como las variables de diseño tradicionalmente en ESO. Por esta razón la sensibilidad se puede calcular por elemento. Es decir la sensibilidad de la estructura a la ausencia o presencia de un elemento en ella.

### Numero de sensibilidad de Desplazamiento

En el análisis por Elementos Finitos (FEA) el comportamiento estático de una estructura está representado por la ecuación de equilibrio:

$$Ku=p \quad (1)$$

En donde  $K$  es la matriz de rigidez global del sistema,  $p$  es el vector de cargas y  $u$  es el vector de desplazamientos. De la Eq. (1), es fácil encontrar que la adición o remoción de un elemento resulta en una variación en el desplazamiento  $u$ , que está dado por

$$\Delta u = -K^{-1} \Delta K_i u \quad (2)$$

Donde  $\Delta K_i$  denota la variación en la matriz de rigidez global debido a la remoción o adición del  $i$ -esimo elemento. Para encontrar el cambio en la  $j$ -esima componente del desplazamiento  $u_j$ , se introduce una carga virtual unitaria  $f_j$  correspondiente a  $u_j$ . Multiplicando la Eq. (2) por  $f_j$ , obtenemos:

$$\Delta u_j = f_j^T \Delta u = -f_j^T K^{-1} \Delta K_i u = -u_j^T \Delta K_i u \quad (3)$$

Donde  $u_j$  representa la solución a la Eq. (1) bajo la carga virtual unitaria  $f_j$  (es decir  $K u_j = f_j$ ). El cálculo de matricial de la Eq. (3) puede hacerse a nivel de los elementos. Así el valor de

$$\alpha_{ij} = \pm u_{ij}^T K_i u_i \quad (4)$$

Se define como el numero de Sensibilidad del desplazamiento que es usado para estimar el cambio en el desplazamiento de;  $j$ -esimo grado de libertad debido a la adición (+) o remoción (-) del elemento,  $K_i$  es la matriz de rigidez del elemento  $i$ ,  $u_i$  y  $u_{ij}$  son los desplazamientos del elemento debido a las cargas reales y virtuales respectivamente.

### Numero de Sensibilidad de esfuerzo

En FEA el vector de esfuerzos de el  $k$ -esimo elemento puede ser calculado a partir del vector  $u^k$  de desplazamiento del elemento de la siguiente manera

$$\sigma = DBu^k, \quad (5)$$

Donde  $D$  y  $B$  representan las matrices elástica y de deformación respectivamente. Combinando los números de sensibilidad de desplazamiento, el cambio en el vector de esfuerzos del  $k$ -esimo elemento debido al la adición o remoción del  $i$ -esimo elemento puede ser encontrado como

$$\Delta \sigma = DB \Delta B^k = DB \left\{ \Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_j, \dots, \Delta u_n \right\}_k^T \approx DB \alpha B \quad (6)$$

Donde  $\alpha$  se denomina el vector de sensibilidad de desplazamiento del elemento  $k$ ,  $n$  representa el numero de grados de libertad en el elemento  $k$ . Usando la Eq. (6) el cambio del esfuerzo del  $k$ -esimo elemento puede ser calculado a partir de los cálculos de las variaciones de todos los componentes del desplazamiento.

Una medida escalar del nivel de esfuerzos está dada por el esfuerzo de von Mises

$$\bar{\sigma} = \sigma_{VM} = f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \quad (7)$$

Sin pérdida de generalidad, la variación en la función de esfuerzos del elemento puede ser calculada como

$$\Delta \bar{\sigma} = \nabla f^T \Delta \sigma = \nabla f^T . DB \alpha = \gamma \alpha \quad (8)$$

Donde  $\nabla f = \{\partial f / \partial \sigma_{xx}, \partial f / \partial \sigma_{yy}, \partial f / \partial \sigma_{xy}\}_k^T$  representa el vector gradiente de la función de esfuerzos y  $\gamma = \nabla f^T DB = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_n\}_k^T$ . Substituyendo Eq. (4) en (8) da

$$\Delta \bar{\sigma} = \pm \sum_{j=1}^n (\gamma_{ij}^T K_i u_i) = \pm \sum_{j=1}^n (\gamma_{ij}^T) K_i u_i \quad (9)$$

Recordando que  $u_{ij}^T (j = 1..n)$  es la solución del  $j$ -esimo sistema virtual de  $K u_{ij} = f_j$ . Multiplicando por  $\square_j$  esta ecuación y sumando todas las  $n$  ecuaciones de desplazamiento virtual, tenemos

$$K \sum_{j=1}^n (\gamma_j u_{ij}) = \sum_{j=1}^n \gamma_j f_j \text{ o } K \tilde{u}_{ik} = \tilde{f}, \quad (10)$$

Donde  $\tilde{u}_{ik} = \sum_{j=1}^n \gamma_j u_{ij}$  representa un vector de desplazamientos virtuales y  $\tilde{f} = \sum_{j=1}^n \gamma_j f_j$  denota una carga virtual.

En otras palabras, Eq (10) introduce un nuevo sistema virtual en donde  $n$  componentes diferentes de cero del vector de cargas  $\tilde{f}$  corresponden con los coeficientes  $\gamma_j$ . Así que la solución  $\tilde{u}_{ik}$  provista por el nuevo sistema virtual (10) determina

$$\alpha_{\sigma,i} = \Delta \bar{\sigma} = \pm \tilde{u}_{ik}^T . K_i . u_i \quad (11)$$

Como el numero de sensibilidad de esfuerzo del elemento  $i$ , el cual es usado para indicar el cambio del esfuerzo del elemento  $k$  debido a la ausencia o presencia del elemento  $i$ . Nótese que Eq. (11) para análisis de sensibilidad de esfuerzo es similar a la Eq. (4) para análisis de sensibilidad de desplazamiento.. De hecho, los dos números de sensibilidad son calculados en exactamente la misma forma, con solamente diferencia en la su respectiva vectores de carga virtual.

## EL METODO DE MALLAS FIJAS

Sea  $\Omega_{FG}$  la más pequeña caja que encierra completamente el dominio  $\Omega$  y se orienta a lo largo del sistema de coordenadas estándar, es decir

$$\Omega_{FG} = \{x \mid \min_{y \in \Omega} (y_i) \leq x_i \leq \max_{y \in \Omega} (y_i)\}$$

Entonces  $\Omega_{FG}$  se denomina el dominio de mallas fijas. Un punto  $\mathbf{x} \in \Omega_{FG}$  se considera adentro si  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Un punto  $\mathbf{x} \in \Omega_{FG}$  se considera afuera si  $\mathbf{x} \notin \Omega$ . Para preservar las características del problema original, las propiedades del material de afuera son las equivalentes a las de un medio no interactivo. El objeto es embebido en una caja de material no interactivo. Nótese que esta definición transforma el problema elástico en un problema de dos materiales.

Fig. 1 muestra un ejemplo de un dominio bi-dimensional. Para obtener la malla fija, el dominio de mallas fijas  $\Omega_{FG}$ , es subdividido en un conjunto de elementos cuadrados de dimensión  $h$ .

Un elemento es cada una de las celdas de dimensión  $h \times h$ , en las cuales  $\Omega_{FG}$  se subdivide. Los elementos  $e_m$ ,  $m=0, \dots, n_e-1$  se numeran en orden ascendente desde el elemento en la esquina inferior izquierda.

De acuerdo a la posición de los elementos con respecto a la estructura pueden ser catalogados como Inside (*I*), Outside (*O*), o Neither Insider nor Outside (*NIO*). Fig. 1 muestra un ejemplo de una estructura modelada con una Malla Fija. Nótese que los elementos *NIO* están constituidos por dos tipos diferentes de material y por tanto sus propiedades no son constantes.

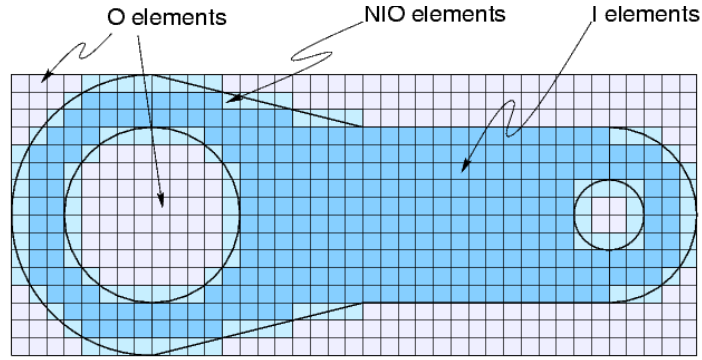


Figura 1: Aproximación de Mallas fijas de la geometría de una estructura.

Para materiales elásticos lineales la matriz de rigidez para un elemento en la malla fija esta dada por la siguiente ecuación:

$$K = \int_{\Omega_e} C \varepsilon(N_a e_j) \varepsilon(N_b e_i) d\Omega \quad (12)$$

Donde  $C$  es la matriz constitutiva,  $\varepsilon$  es el tensor de esfuerzos,  $N_a$  y  $N_b$  son las funciones de forma y  $e_i$  y  $e_j$  son vectores unitarios. La matriz constitutiva para material isotrópico esta dada por

$$C = \begin{bmatrix} (\lambda + \mu) & \lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 2\mu) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé y están relacionados con el modulo de Young  $E$  y el radio de Poisson  $\nu$ , de la siguiente forma

$$\lambda = \frac{Ev}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (14)$$

Si  $\lambda^*$  y  $\mu^*$  se definen como

$$\lambda^* = \frac{Ev}{(1-2v)(1+v)}, \mu^* = \frac{E}{2(1+v)} \quad (15)$$

Entonces la matriz constitutiva se puede reescribir como

$$\mathbf{C} = E\mathbf{C}^* \quad (16)$$

Donde,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (\lambda^* + \mu^*) \lambda^* & 0 & 0 \\ \lambda^* & (\lambda^* + 2\mu^*) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^* + 2\mu^*) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Si un elemento está compuesto por un solo material como en el caso de elementos  $I$  y  $O$ , entonces el modulo de Young puede ser sacado fuera de la integral. Así la matriz de rigidez puede ser calculada como

$$\mathbf{K} = E \mathbf{K}^0 \quad (18)$$

donde el termino

$$\mathbf{K}^0 = \int_{\Omega_e} \mathbf{C}^* \varepsilon(N_a e_j) \varepsilon(N_b e_i) \quad (19)$$

Se denomina la matriz de rigidez estándar y depende solo de la geometría del elemento que en este caso es constante para todos los elementos  $I$  y  $O$  en la Malla Fija.

Un elemento  $NIO$  esta parcialmente dentro de la estructura y sus propiedades no son constantes sobre el elemento. Así la matriz de rigidez puede ser computada en términos del modulo de Young del material del interior ( $E_I$ ) y del exterior ( $E_O$ ) de la estructura como,

$$\mathbf{K}_{NIO} = E_I \int_{\Omega_e^I} \mathbf{C}^* \varepsilon(N_a e_j) \varepsilon(N_b e_i) d\Omega_e^I + E_O \int_{\Omega_e^O} \mathbf{C}^* \varepsilon(N_a e_j) \varepsilon(N_b e_i) d\Omega_e^O \quad (20)$$

donde  $\Omega_e^I$  y  $\Omega_e^O$  representan la parte del elemento adentro de la estructura y por fuera de ella respectivamente, además  $\Omega_e^I \cup \Omega_e^O = \Omega_e$ .

### Aproximación Discreta - A0

Esta es la forma más simple de calcular (20) y consiste en aproximar los elementos  $NIO$ s como  $I$  o  $O$  dependiendo de la cantidad de material adentro de la estructura. Debido a que las propiedades del material solo toman valores discretos (propiedades  $I$  o  $O$ ) esta aproximación se denomina aproximación discreta.

$$\mathbf{K}_{NIO} = E_{NIO} \mathbf{K}^0$$

$$E_{NIO} = \begin{cases} E_I & \text{if } V_1/V_2 > 1/2 \\ E_0 & \text{if } V_1/V_2 \leq 1/2 \end{cases} \quad (21)$$

Donde  $V = volume(\Omega_e)$  y  $V = volume(\Omega_e^I)$

Experimentos numéricos en el caso de dos dimensiones han mostrado que las aproximaciones A0 presentan un gran error en los campos de esfuerzos. Para reducir el error es necesario disminuir el tamaño de los elementos de la malla. Como consecuencia del refinamiento de la malla el costo computacional se incrementa a puntos inmanejables.

### Aproximación por promedios ponderados - A1

Esta es un procedimiento más preciso pero es aun aproximado cuando se compara con mallas que siguen completamente la geometría del objeto. Aproximaciones A1 transforman el elemento constituido de dos materiales por un material homogéneo isotrópico que mejor simula las características discontinuas del elemento. Si se toma una promedio ponderada de los valores del modulo de Young del interior  $I$  y el exterior  $O$ , entonces (20) puede ser aproximado como

$$\begin{aligned} K_{NIO} &= E_{NIO} \overset{o}{K} \\ E_{NIO} &= \xi E_I + (1 - \xi) E_0 \end{aligned} \quad (22)$$

Donde  $\xi$  es la fracción de volumen del elemento que está dentro de la estructura  $\xi = V_I/V$ . De manera similar a la aproximación A0, la matriz de rigidez para el elemento  $NIO$  puede calcularse en términos de la matriz de rigidez de un elemento estándar  $K$ . Finalmente, A0 y A1 aproximan los elementos NIO como elementos homogéneos aplicando (21) o (22). Sin embargo la aproximación A1 tiene una precisión superior sin incrementar significativamente los tiempos de cómputo. Adicionalmente aproximación A1 permite la eliminación parcial de material. Lo que lo hace significativamente superior en la aplicación del Optimización Estructural Evolutiva (ESO).

### Aproximación por puntos de Gauss

En esta aproximación se utiliza el método de Gauss-Legendre para hacer la integración de la matriz de rigidez y se utiliza la función de Heaviside  $H(r, s)$

$$\int g d\varpi = \int g H(r, s) d\Omega \quad (23)$$

El uso de la función de Heaviside causa que la integración sea discontinua sobre todo el dominio del elemento NIO. Para una buena aproximación se debe usar una cantidad de puntos de Gauss densa, lo que hace que el método sea computacionalmente costoso, ya que la cantidad de puntos influye sobre el numero de evaluaciones que se deben hacer.

## OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL EVOLUTIVA

En ESO clásico, los elementos que están bajamente esforzados son considerados elementos con bajo aporte al soporte estructural del objeto y por tanto son candidatos para ser removidos. El presente acercamiento al problema difiere en dos aspectos fundamentales con el problema clásico. En primer lugar se utiliza números de sensibilidad en lugar de valores del esfuerzo como criterio de remoción o adición de material. En segundo lugar el material es removido de manera continua usando aproximación A1 en lugar de aproximación A0.

El criterio de evolución para adición o remoción de material se determina por comparación del numero de sensibilidad del esfuerzo con su valor más alto encontrado en la estructura y que satisfaga  $\alpha_{\sigma i} \leq RR_{ss} \times \alpha_{\sigma max}$ .

Donde  $RR_{ss}$  se denomina el Tasa de Rechazo (del ingles rejection rate) para el estado estable ss (del ingles steady state). Aproximación A0 remueve completamente el elemento basado en este criterio. Sin embargo esto da lugar a superficies con características irregulares. Para corregir este factor la remoción de material se hace a partir de calcular las curvas de iso-superficie del numero de sensibilidad calculado para toda la estructura. Este proceso de remoción de material es repetido usando el mismo  $RR$  hasta que se llega al estado estable. El estado estable es el estado en el cual no se remueve más material con el presente  $RR$ . En este punto es necesario incrementar el  $RR$  para continuar con la remoción de material. Diferentes criterios existen para incrementar este valor, siendo el más conocido el uso de un coeficiente de tasa de evolución  $ER$  (del ingles Evolution Rate)  $RR_{ss+1} = RR_{ss} + ER$ .  $ER$  varía entre valores de cero a uno. La determinación de este valor se hace a través de pruebas computacionales.

### Algoritmo.

El algoritmo de optimización consta de los siguientes pasos

1. Definición del dominio inicial
2. Determinación del dominio de la malla fija  $\Omega_{FG}$
3. Realizar un Análisis de Elementos Finitos (FEA) del sistema para determinar el máximo esfuerzo y las cargas virtuales  $\bar{f}$  dado por Eq. (10).
4. Realizar otro FEA para los sistemas virtuales
5. Determinar los números de sensibilidad determinados por la Eq. (11)
6. Calcular las curvas de iso-esfuerzo del número de sensibilidad  $\alpha_{\sigma i} = RR_{ss} \times \alpha_{\sigma max}$
7. Remover el material a través de las curvas de iso-esfuerzo  $\alpha_{\sigma i}$
8. Si se ha alcanzado el estado estacionario, incrementar la tasa de rechazo  $SS$ . de acuerdo a  $RR_{ss+1} = RR_{ss} + ER$  y volver al paso anterior. De otra forma volver al paso 3 a 7 hasta que se haya encontrado el mínimo máximo esfuerzo.

### Ejemplo

La historia evolutiva de la optimización de una viga de Michell se muestra en la Fig. 2 . La Fig 2.q muestra la geometría inicial y las cargas aplicadas. La parte c, d y e muestran la evolución de la estructura en diferentes estados. Los resultados preliminares de esta investigación muestran que el presente algoritmo llega a niveles similares de reducción de material (40%) en solamente 84 iteraciones. En contraste ESO clásico necesita 838 iteraciones. El tiempo de reducción total fue del 80 al 98 % cuando se compara con diferentes variantes del método ESO.

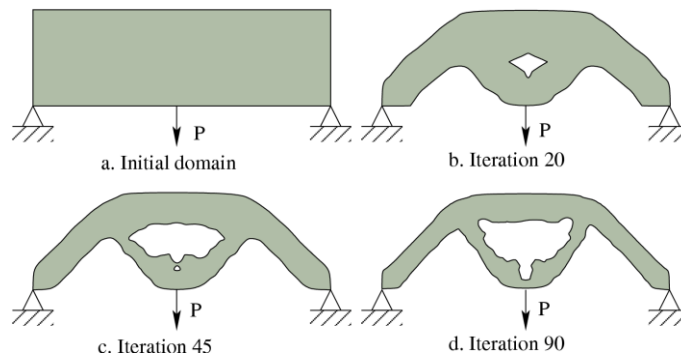


Figura 2: Evolución de de la estructura de Michell utilizando números de sensibilidad de esfuerzos y remoción de material a través de curvas de iso-sensibilidad.

## CONCLUSIONES

Cuando se utiliza ESO clásico los elementos son removidos utilizando un criterio discreto de remoción por elemento. El resultado es una superficie irregular que introduce concentraciones locales de esfuerzo. La remoción de material utilizada aquí sigue trayectorias suaves evitando las concentraciones locales de esfuerzo. Debido a esto los dos métodos siguen diferentes trayectorias de evolución. Los resultados preliminares muestran convergencias mucho mas rápidas del método utilizado en el presente estudio. Tampoco se observan formación de patrones de tablero de ajedrez.

## NOMENCLATURA

|                     |  |
|---------------------|--|
| $K$                 | Matriz de rigidez de un elemento               |
| $u$                 | vector desplazamientos                         |
| $\alpha_{ij}$       | Número de sensibilidad de desplazamiento       |
| $\alpha_{\sigma i}$ | Número de sensibilidad de esfuerzo             |
| $\Omega_{FG}$       | Dominio de Mallas Fijas                        |
| $RR_{ss}$           | Tasa de rechazo para el estado estacionario ss |
| ER                  | Tasa de evolución                              |
| $\mathring{K}$      | Matriz de rigidez estándar                     |

## REFERENCIAS

1. M. García Fixed Grid Finite Element Analysis in Structural Design and Optimization. PhD thesis. 1999. University of Sydney.
2. Garcia M.J. and Steven G.P. Displacement Error for Fixed grid FEA elasticity problems. III congreso Colombiano en elementos finitos y modelación matemática. Medellín 10-11 de Octubre de 1996.
3. Manuel García and Grant P. Steven. Fixed Grid Finite Elements in Elasticity Problems. Engineering Computations. Volume 16 Number 2, 1999. pp. 145-164.
4. Manuel García and Grant Steven. Fixed grid finite elements and global/local analysis. IV world congress on computational mechanics, Buenos Aires, Junio 1998.
5. H. Kim, M. J. García, O. M. Querin, G. P. Steven and Y. M Xie Fixed Grid Finite Element Analysis in Evolutionary Structural Optimisation III World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimisation, New York, Mayo 1999.
6. Manuel García and Grant Steven. Optimisation of structures by using Fixed Grid representation of the finite element domain. Australasian Conference in structural optimisation, Sydney Febrero de 1998.
7. Manuel García and Grant Steven. Interactive Aerospace design using Fixed Grid Finite Element Analysis. International Aerospace Congress, Sydney, Febrero 1997.
8. Xie, Y. M. and Steven, G. P. (1993), "A simple evolutionary procedure for structural optimization," *Computers and Structures*, vol. 49, no. 5, pp. 885–896.
9. Kim, H., García, M. J., Querin, O. M., Steven, G. P. and Xie, Y. M. (2000), "Fixed grid finite element analysis in evolutionary structural optimisation." *Engineering Computations*, vol. 17, no. 4, pp. 427–439.
10. García, M., Ruiz, O. and Steven, G. (2001), "Engineering design using evolutionary structural optimisation based on iso-stress-driven smooth geometry removal," in *NAFEMS World Congress 2001*, pp. 349–360.



11. Quing Li, Grant P Steven, Osvaldo M Querin y Y.M. Xie, "Evolutionary Shape Optimization for Stress Analysis", Mechanics Research Communications, Vol 6 No. 6 pp 657-664, 1999.